МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФЕСТИВАЛЬ ЗОЛОТОЕ РУНО.

8 класс. Теория чисел–2. 2 июня 2009.

1. а) Остатки от деления натурального числа на 110, 111, 112, ..., 220 выписали в строчку. Оказалось, что каждое число, начиная со второго, больше предыдущего. Докажите, что в строчке записаны 111 последовательных целых чисел.

б) А верно ли, что если остатки от деления на 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 образуют возрастающую последовательность, то эти остатки – последовательные числа?

2. В равенстве $x^5 + 2x^4 = p^k$ числа x и k – натуральные, а p – простое. Найдите эти числа.

3. Найдите все натуральные a и b, для которых оба числа $\frac{a^2+b}{b^2-a}$ и $\frac{b^2+a}{a^2-b}$ – целые.

4. В строчку выписаны 2009 чисел, каждое из которых больше предыдущего на одну и ту же величину. a) Может ли среди выписанных чисел быть ровно 102 целых? b) Сколько может быть целых чисел в такой строке?

5. Последовательность (x_n) задана условиями $x_1 = 2$, $nx_n = 2(2n-1)x_{n-1}$ при $n > 1$. Докажите, что x_n – целое при всех натуральных n.

6. Множество A содержит не менее четырех вещественных чисел. Известно, что для любых различных $a, b, c \in A$ число $a^2 + bc$ рационально. Докажите, что все элементы A можно сделать рациональными, домножив их на квадратный корень из одного и того же натурального числа.

7. Докажите, что каждое натуральное число можно представить в виде суммы нескольких разных степеней числа $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ с целыми показателями.

8. Решите в целых числах уравнение $6(6a^2 + 3b^2 + c^2) = 5n^2$.